

УДК 532(075.8)

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ  
НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ  
В ВОДОХРАНИЛИЩЕ

В. Г. Созанов, И. Д. Музаев, С. А. Макаров

Поставлены и решены начально-краевые задачи волнового движения воды в водохранилище при вторжении в него обвально-оползневой массы или лавинообразного потока. Используется линейная и нелинейная теория поверхностных гравитационных волн в идеальной несжимаемой жидкости. Получены расчетные формулы для определения скорости вторжения в водоем лавинообразного потока и амплитуды образовавшейся волны.

В узких ущельях горных рек созданы искусственные глубокие (270–300 м.) водохранилища узкоканьонного типа. В них часто вторгаются обвально-оползневые массивы горной породы и потоки селевого либо лавинного характера, провоцирующие крупные поверхностные гравитационные волны, приводящие к стихийным бедствиям. В связи с этим стало актуальным исследование вопросов, связанных с волновыми движениями воды в узких глубоких непризматических водоемах.

Схематизируем водохранилище в виде прямоугольного параллелепипеда, ограниченного условиями  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq y \leq B$ ,  $-H \leq z \leq 0$  ( $H$  — глубина,  $L$  — длина,  $B$  — ширина водоема). Предположим, что в плоскость  $x = 0$  помещена плотина. Плоскость  $z = 0$  представляет невозмущенную свободную поверхность воды,  $z = H$  — дно, а  $y = 0$  и  $y = B$  являются уравнениями бортов водохранилища.

Рассмотрим волновое движение воды, вызванное тем, что в промежутке времени  $0 < t < t_0$  с некоторого участка бортов водоема

$$y = 0, \quad -h < z < 0, \quad x_0 - a < x < x_0 + a$$

произошло вторжение обвально-оползневой массы грунта или потока селевого либо лавинного характера со скоростью  $V_0$ . С целью определения амплитуды волны сформулированная задача гидродинамики сводится к нахождению потенциала скорости  $\varphi(x, y, z, t)$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа [1–4]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

и следующим начальным и граничным условиям:

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad z = 0 \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = V(x, z, t), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=B} = 0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0, \quad \left. \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right|_{z=0} = 0, \quad (5)$$

$$V(x, z, t) = V_0(1(t) - 1(t - t_0))(1(x - x_0 + a) - 1(x - x_0 - a)), \quad (6)$$

где  $V_0 = \text{const}$ ,  $1(x)$  — единичная функция Хевисайда,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Относительно граничных условий (4) заметим следующее. Второе из них выражает неподвижность и непроницаемость боковой грани  $y = B$ . Первое условие получается в предположении, что величина горизонтального перемещения участка борта  $y = 0$  мала по сравнению с шириной водоема и, следовательно, изменением конфигурации водоема можно пренебречь (рассматриваются малые обвально-оползневые явления). Это означает, что можно считать в течение промежутка времени  $(0, t_0)$  скорость частиц жидкости у борта  $y = 0$  заданной.

В действительности это граничное условие должно иметь такой вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_n \quad \text{при} \quad y = \psi(x, z, t), \quad (7)$$

где функция  $\psi(x, z, t)$  характеризует перемещение участка борта,  $n$  — нормаль к поверхности  $\psi(x, z, t)$ ,  $V_n$  — нормальная составляющая скорости перемещения участка борта.

Применим к выражениям (1)–(6) интегральное преобразование Лапласа относительно времени  $t$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} = 0, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \right|_{y=0} = \tilde{V}(x, z, p), \quad \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \right|_{y=B} = 0, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0, \quad \left. \left( p^2 \tilde{\varphi} + g \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \right) \right|_{z=0} = 0. \quad (11)$$

Далее, применив к выражениям (8)–(11) конечное косинус-преобразование Фурье относительно переменной  $y$ , получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_m}{\partial z^2} - a_m^2 \tilde{\varphi}_m - \tilde{V}(x, z, p) = 0, \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_m}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_m}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_m}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0, \quad \left. \left( p^2 \tilde{\varphi}_m + g \frac{\partial \tilde{\varphi}_m}{\partial z} \right) \right|_{z=0} = 0, \quad (14)$$

где

$$\tilde{\varphi}_m(x, z, p) = \int_0^B \tilde{\varphi}(x, y, z) \cos(a_m y) dy, \quad a_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Теперь разложим функцию  $\tilde{V}(x, z, p)$  в ряд Фурье по косинусам в интервале  $(0, L)$  относительно переменной  $x$ :

$$\tilde{V}(x, z, p) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{V}_n(z, p) \cos(a_n x), \quad (16)$$

$$\tilde{V}_n(z, p) = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{V}(x, z, p) \cos(a_n x) dx, \quad a_n = \frac{n\pi}{L}, \quad (17)$$

$$\tilde{V}_0(z, p) = \frac{1}{L} \int_0^L \tilde{V}(x, z, p) dx. \quad (18)$$

Решение уравнения (12) будем искать в виде:

$$\tilde{\varphi}_m(x, z, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{n,m}(z, p) \cos(a_n x). \quad (19)$$

Выражение (19) автоматически удовлетворяет граничным условиям (13). Уравнение (12) и граничные условия (14) примут вид

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}_{n,m}}{dz^2} - \lambda_{n,m}^2 \tilde{\varphi}_{n,m} = \tilde{V}_n(z, p), \quad (20)$$

$$\left. \frac{d\tilde{\varphi}_{n,m}}{dz} \right|_{z=-H} = 0, \quad \left( p^2 \tilde{\varphi}_{n,m} + g \frac{d\tilde{\varphi}_{n,m}}{dz} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (21)$$

где  $\lambda_{n,m} = \sqrt{a_n^2 + a_m^2}$ .

Выражение (20) представляет обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого при граничных условиях (21) на плоскости  $z = 0$  имеет следующий вид:

$$\tilde{\varphi}_{n,m}(0) = \frac{-2g\lambda_{n,m}\tilde{V}_n(p) \operatorname{sh}(\lambda_{n,m}\frac{h}{2}) \operatorname{ch}(\lambda_{n,m}(H - \frac{h}{2}))}{\lambda_{n,m}^2(p^2 + \gamma_{n,m}^2) \operatorname{ch}(\lambda_{n,m}H)}. \quad (22)$$

После выполнения обратных интегральных преобразований получается уравнение для волновой поверхности

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) = & \frac{2aV_0 t_0 h}{LB} + \frac{16V_0}{BL} \sum_{n=1}^{\infty} A_n B_{n,0} \frac{\cos(a_n x)}{a_n} \\ & + \frac{32V_0}{BL} \sum_{n,m=1}^{\infty} A_n B_{n,m} \frac{\cos(a_n x) \cos(a_m y)}{a_n} + \frac{16V_0 a}{BL} \sum_{m=1}^{\infty} B_{m,0} \cos(a_m y), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} A_n = & \cos(a_n x_0) \sin(a_n a), \quad \gamma_{n,m} = \sqrt{g\lambda_{n,m} \operatorname{th}(\lambda_{n,m}H)}, \\ B_{n,m} = & \frac{\cos(\gamma_{n,m}(t - \frac{t_0}{2})) \sin(\gamma_{n,m} \frac{t_0}{2}) \operatorname{ch}(\lambda_{n,m}(H - \frac{h}{2})) \operatorname{sh}(\lambda_{n,m} \frac{h}{2})}{\lambda_{n,m}^2 \gamma_{n,m} \operatorname{ch}(\lambda_{n,m}H)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Выражения (23) и (24) позволяют определить амплитуду волны в произвольной точке свободной поверхности воды в зависимости от следующих параметров:

$V_0$  — скорость обвально-оползневого массива или же потока селевого либо лавинного характера;

$t_0$  — продолжительность времени вторжения;

$2a$  и  $h$  — ширина и высота фронта обвально-оползневого массива.

Теперь рассмотрим волновое движение воды в узких глубоких непризматических водохранилищах. В линейном приближении пространственное движение идеальной несжимаемой жидкости описывается с помощью следующей «отфильтрованной» системы дифференциальных уравнений [5]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (30)$$

где  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  — координаты вектора скорости,  $P$  — гидродинамическое давление,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\rho$  — плотность жидкости.

В связи с тем, что рассматривается движение жидкости в узком водоеме, ширина  $(x, z)$  которого — плавно изменяющаяся функция переменных  $x$  и  $z$ , можно принять следующие упрощающие предположения:

1. Поперечная составляющая скорости  $V_y$  удовлетворяет условиям  $V_y \ll V_x$ ,  $V_y \ll V_z$ .

2. Поперечная неоднородность движения жидкости в рассматриваемом водоеме пренебрежимо мала по сравнению с продольной и вертикальной неоднородностью движения, т. е.

$$\frac{\partial P}{\partial y} \ll \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \ll \frac{\partial P}{\partial z}.$$

3. Из-за наличия боковой приточности к водоему с его боковых бортов величина  $\frac{\partial V_y}{\partial y}$  сравнима с другими градиентными величинами

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} \sim \frac{\partial V_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial y} \sim \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Проинтегрируем систему (27)–(30) по переменной  $y$  в пределах  $(B_1(x, z), B_2(x, z))$

$$\int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial V_x}{\partial t} dy = -\frac{1}{\rho} \int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial P}{\partial x} dy; \quad (31)$$

$$\int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial V_y}{\partial t} dy = -\frac{1}{\rho} \int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy; \quad (32)$$

$$\int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial V_z}{\partial t} dy = -gB - \frac{1}{\rho} \int_{-B_1}^{B_2} \frac{\partial P}{\partial z} dy; \quad (33)$$

$$\int_{B_1}^{B_2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dy = 0. \quad (34)$$

С учетом вышеприведенных допущений и известной формулы дифференцирования под знаком интеграла

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha},$$

выражения (31)–(34) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial V_x}{\partial t} dx &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_1}^{B_2} V_x dy; \\ \int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial P}{\partial x} dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{B_1}^{B_2} P dy - P(x, B_2, z, t) \frac{\partial B_2}{\partial x} + P(x, B_1, z, t) \frac{\partial B_1}{\partial x}; \\ \int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial V_x}{\partial x} dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{B_1}^{B_2} V_x dy - V_x(x, B_2, z, t) \frac{\partial B_2}{\partial x} + V_x(x, B_1, z, t) \frac{\partial B_1}{\partial x}; \\ \int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial V_z}{\partial z} dy &= \frac{\partial}{\partial z} \int_{B_1}^{B_2} V_z dy - V_z(x, B_2, z, t) \frac{\partial B_2}{\partial z} + V_z(x, B_1, z, t) \frac{\partial B_1}{\partial z}; \\ \int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial V_y}{\partial y} dx &= V_y(x, B_2, z, t) - V_y(x, B_1, z, t). \end{aligned}$$

В результате такого осреднения, называемого методом Буссинеска, уравнения (27)–(30) примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (BU_x) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{P}B) + -\frac{1}{\rho} \frac{\partial B}{\partial x} \bar{P}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (BU_z) = -gB - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{P}B) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B}{\partial z} \bar{P}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (U_x B) + \frac{\partial}{\partial z} (U_z B) = q(x, z, t), \quad (37)$$

где приняты следующие обозначения:

$$U_x(x, z, t) = \frac{1}{B(x, z)} \int_{B_1}^{B_2} V_x(x, y, z, t) dy,$$

$$U_z(x, z, t) = \frac{1}{B(x, z)} \int_{B_1}^{B_2} V_z(x, y, z, t) dy,$$

$$\bar{P}(x, z, t) = \frac{1}{B(x, z)} \int_{B_1}^{B_2} P(x, y, z, t) dy,$$

$$\begin{aligned} q(x, z, t) &= V_x(x, B_2, z, t) \frac{\partial B_2}{\partial x} + V_z(x, B_2, z, t) \frac{\partial B_2}{\partial z} + V_y(x, B_2, z, t) \frac{\partial B_2}{\partial z} \\ &\quad - V_x(x, B_1, z, t) \frac{\partial B_1}{\partial x} - V_z(x, B_1, z, t) \frac{\partial B_1}{\partial z} - V_y(x, B_1, z, t) \frac{\partial B_1}{\partial z} \\ &= V_n(x, B_2, z, t) - V_n(x, B_1, z, t). \end{aligned}$$

Величины  $U_x$ ,  $U_z$ ,  $\bar{P}$  представляют собой средние по ширине водоема значения  $V_x$ ,  $V_z$  и  $P$  соответственно,  $q(x, z, t)$  — интенсивность боковой приточности.  $V_n(x, B_2, z, t)$  и

$V_n(x, B_1, z, t)$  — нормальные составляющие вектора скорости к поверхностям  $y = B_2(x, z)$  и  $y = B_1(x, z)$  соответственно.

Выражения

$$P(x, B_1, z, t) \frac{\partial B_1}{\partial x} - P(x, B_2, z, t) \frac{\partial B_2}{\partial x},$$

$$P(x, B_1, z, t) \frac{\partial B_1}{\partial z} - P(x, B_2, z, t) \frac{\partial B_2}{\partial z}$$

представляют собой составляющие силы реакции боковых граней на осях  $x$  и  $z$  соответственно (реакция боковых стенок сосуда). На основании предположения 2 эти составляющие приближенно равняются следующим выражениям:

$$-\bar{P}(x, z, t) \frac{\partial B_2}{\partial x}, \quad -\bar{P}(x, z, t) \frac{\partial B_1}{\partial z}.$$

Система (35)–(37) в векторной форме запишется так

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } \bar{P}, \quad (38)$$

$$\text{div}(B\bar{U}) = q, \quad (39)$$

$$\bar{U}(U_x, U_z), \quad \bar{g}(0, -g).$$

Для потенциального движения

$$\text{rot } \bar{U} = 0.$$

Вводя потенциал средней по ширине скорости  $\Phi(x, z, t)$  из выражения (38) легко получаем интеграл Коши в линейном приближении

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz + \frac{\bar{P}}{\rho} = f(t). \quad (40)$$

Компоненты средней по ширине скорости выражаются через потенциал  $\Phi(x, z, t)$  в виде

$$\bar{U} = \text{grad } \Phi, \quad U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad U_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (41)$$

Пусть  $z = \eta(x, t)$  — уравнение осредненной по ширине волновой поверхности. Тогда при отсутствии внешнего давления на свободную поверхность выражение (40) для  $z = \eta(x, t)$  принимает вид

$$\frac{\partial \Phi(x, \eta, t)}{\partial t} + g\eta = 0, \quad (42)$$

куда величина  $\eta(x, t)$  входит неявно. Однако, как это принято в линейной теории волн Коши — Пуассона (где  $\eta/\lambda \ll 1$ , т. е. амплитуда волны мала по сравнению с длиной волны), выражение (42) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial t} + g\eta(x, t) = 0. \quad (43)$$

В линейном приближении имеет место равенство

$$U_z(x, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial z}. \quad (44)$$

Дифференцируя выражение (43) по  $t$  и подставляя в него (44), получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (45)$$

С учетом (41) уравнение (39) примет вид

$$\operatorname{div} (B \operatorname{grad} \Phi) = q, \quad (46)$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{q}{B}. \quad (47)$$

В классической теории волн Коши — Пуассона потенциал скорости удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа [1–4]. Здесь же дополнительно появляются три члена, из которых два последних члена левой части связаны с непризматическим очертанием водоема. Правая часть связана с боковой приточностью или со скоростью вторжения в водоем обвально-оползневой массива или потока селевого либо лавинного характера.

При выводе дифференциального уравнения (47) используются упрощающие допущения 1 и 2. Аналогичные допущения принимаются для вывода дифференциальных уравнений одномерного неустановившегося движения воды в непризматическом русле (плавно изменяющееся движение воды). В отличие от метода Буссинеска, гидродинамические уравнения Эйлера усредняются не по полному живому сечению потока, а лишь по ширине водоема. Дифференциальное уравнение (47) дает возможность решить широкий круг задач, связанных с волновым движением идеальной несжимаемой жидкости в узких непризматических водоемах.

Рассмотрим частный случай, когда боковой приток  $q = 0$  и ширина водоема  $B(x, z)$  изменяется по экспоненциальному закону

$$B(x, z) = B_0 \exp(s_1 x + s_2 z). \quad (48)$$

В этом случае коэффициенты дифференциального уравнения — постоянные числа  $s_1$  и  $s_2$ , поэтому можно провести систематический анализ влияния очертания непризматичности водоема на характеристики волнового движения жидкости.

Подставим выражение (48) в (47), при  $q = 0$  получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + s_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + s_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (49)$$

Граничные условия на свободной поверхности  $z = 0$  и на дне  $z = -H$  имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (50)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H. \quad (51)$$

Решение уравнения (49) можно представить так

$$\Phi(x, z, t) = e^{-\frac{s_1}{2}x} \Phi_1(x, z, t). \quad (52)$$

Подставим (52) в выражения (49)–(51), получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + s_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{s_1^2}{4} \Phi_1 = 0; \quad (53)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0; \quad (54)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0. \quad (55)$$

Частное решение дифференциального уравнения (53) представим в следующем виде:

$$\Phi(x, z, t) = \Phi_0(z) e^{i(kx - \sigma t)}. \quad (56)$$

Подставим выражение (56) в (53)–(55), получим

$$\frac{d^2 \Phi_0}{dz^2} + s_2 \frac{d\Phi_0}{dz} - \left( k^2 + \frac{s_1^2}{4} \right) \Phi_0 = 0; \quad (57)$$

$$-\sigma^2 \Phi_0(z) + g \frac{d\Phi_0(z)}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad (58)$$

$$\frac{d\Phi_0(z)}{dz} = 0 \quad \text{при } z = -H. \quad (59)$$

Далее имеем

$$\Phi_0(z) = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z}, \quad (60)$$

где

$$\lambda_1 = -\frac{s_2}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{4}}, \quad (61)$$

$$\lambda_2 = -\frac{s_2}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{4}}. \quad (62)$$

Подставим выражение (60) в граничные условия (58) и (59), получим

$$C_2 = -C_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)H},$$

$$\Phi_0(z) = C_1 \frac{e^{-\lambda_1 H}}{\lambda_2} (\lambda_2 e^{\lambda_1(H+z)} - \lambda_1 e^{\lambda_2(H+z)}), \quad (63)$$

$$\sigma^2 (\lambda_2 e^{\lambda_1 H} - \lambda_1 e^{\lambda_2 H}) + g \lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1 H} - e^{\lambda_2 H}) = 0,$$

$$\sigma = \sqrt{g \lambda_1 \lambda_2 \frac{e^{\lambda_1 H} - e^{\lambda_2 H}}{\lambda_2 e^{\lambda_1 H} - \lambda_1 e^{\lambda_2 H}}}.$$

Подставив значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  из (61) и (62) в (63), найдем фазовую скорость

$$C = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \left( 1 + \frac{s_1^2 \lambda^2}{16\pi^2} \right) \frac{\operatorname{th} \left( \frac{2\pi}{\lambda} H \right) \sqrt{1 + \frac{s_1^2 \lambda^2}{16\pi^2} + \frac{s_2^2 \lambda^2}{16\pi^2}}}{\sqrt{1 + \frac{s_1^2 \lambda^2}{16\pi^2} + \frac{s_2^2 \lambda^2}{19\pi^2} + \frac{s_2 \lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{s_1^2 \lambda^2}{16\pi^2} + \frac{s_2^2 \lambda^2}{16\pi^2}}}}, \quad (64)$$

где  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  — длина волны.



При  $s_1 = 0$  и  $s_2 = 0$  из выражения (64) получается общеизвестная формула для фазовой скорости в призматическом бассейне [1–4].

$$C = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi}{\lambda} H\right)}. \quad (65)$$

При  $H \rightarrow \infty$  выражение (64) упрощается и принимает вид

$$C = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \left( \sqrt{1 + \frac{s_1^2 \lambda^2}{16\pi^2} + \frac{s_2^2 \lambda^2}{16\pi^2}} - \frac{s_2 \lambda}{4\pi} \right)}. \quad (66)$$

Анализ этой формулы показывает, что параметр непризматичности, в продольном направлении  $s_1$  незначительно влияет на фазовую скорость волны, а параметр  $s_2$ , характеризующий переменность ширины водоема в вертикальном направлении, — существенно.

При  $s_2 = 0$  для семейства линий тока получается уравнение

$$z = \frac{4\sigma^2}{g \left( \frac{16\pi^2}{\lambda^2} + s_1^2 \right)} \ln \left| 1 + \frac{s_1}{2\sigma} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} x \right| - \frac{4\sigma^2}{g \left( \frac{16\pi^2}{\lambda^2} + s_1^2 \right)} + \operatorname{const}. \quad (67)$$

При допущении  $s_1 = 0$  выражение (67) принимает вид:

$$z = -\frac{\lambda}{2\pi} \ln \left| \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right| + \operatorname{const}, \quad (68)$$

что представляет собой уравнение линий тока для призматического водоема.

Связь между длиной  $\lambda$  и периодом волны  $T$  получается в виде:

$$\lambda = \frac{4\pi g T^2}{\sqrt{64\pi^2 - s_1^2 g^2 T^2}}. \quad (69)$$

Легко заметить, что при выполнении условия

$$s_1 > \frac{8\pi^2}{gT^2}, \quad (70)$$

волна с периодом  $T$  неустойчива. Этот фактор, по-видимому, можно использовать при конструировании волногасящих сооружений.

Волновое движение воды в узких глубоких непризматических водохранилищах вызванное вторжением обвально-оползневых массивов либо лавинообразных потоков описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{q(x, z, t)}{B}, \quad (71)$$

и следующими начальными и граничными условиями

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (72)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (73)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0, \quad \left. \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right|_{z=0} = 0, \quad (74)$$

где  $B(x, z)$  — ширина водохранилища,  $q(x, z, t)$  — скорость вторжения в водохранилище обвално-оползневого массива или лавинообразного потока.

Подставим  $B(x, z)$  из (48) в (71) и применим подстановку

$$\Phi(x, z, t) = e^{-\frac{s_1}{2}x} \Phi_1(x, z, t), \quad (75)$$

тогда выражения (71)–(74) примут вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + s_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{s_1^2}{4} \Phi_1 = \frac{q(x, z, t)}{B_0} e^{-\frac{s_1}{2}x} \cdot e^{-s_2 z}, \quad (76)$$

$$\Phi_1 \Big|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (77)$$

$$\left. \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{s_1}{2} \Phi_1 \right) \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{s_1}{2} \Phi_1 \right) \right|_{x=L} = 0, \quad (78)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0, \quad \left. \left( \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) \right|_{z=0} = 0. \quad (79)$$

В результате введения дифференциального оператора

$$D[\psi] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + s_2 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{s_1^2}{4} \quad (80)$$

и применения подстановки

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{s_1}{2} \Phi_1 = \psi(x, z, t) \quad (81)$$

начально-краевая задача (76)–(79) приводится к следующему виду

$$D[\psi] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q(x, z, t)}{B_0} e^{-\frac{s_1}{2}x} \cdot e^{-s_2 z} \right) - \frac{s_1}{2} \frac{q(x, z, t)}{B_0} e^{-\frac{s_1}{2}x} \cdot e^{-s_2 z}, \quad (82)$$

$$\psi \Big|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (83)$$

$$\psi(x, z, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad \psi(x, z, t) \Big|_{x=L} = 0, \quad (84)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0, \quad \left. \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right|_{z=0} = 0. \quad (85)$$

Начально-краевая задача (82)–(85) решается теми же методами, которые были использованы при решении задачи (1)–(6).

В частном случае при допущении  $s_2 = 0$ , для волновой поверхности воды в водохранилище получается следующее выражение

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & \frac{2V_0}{gLB_0} e^{-\frac{s_1}{2}x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n^4} \left( a_n \cos(a_n x) + \frac{s_1}{2} \sin(a_n x) \right) \\ & \times \cos\left(\gamma_n \left(t - \frac{t_0}{2}\right)\right) \sin\left(\gamma_n \frac{t_0}{2}\right) (2a_n J_{1,n} + s_1 J_{2,n}), \end{aligned} \quad (86)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_n = & \sqrt{g\lambda_n \operatorname{th} \lambda_n H}, \quad \lambda_n = \sqrt{a_n^2 + \frac{s_1^2}{4}}, \quad a_n = \frac{n\pi}{L}, \\ J_{1,n} = & \int_{x_0-a}^{x_0+a} e^{-\frac{s_1}{2}x} \cdot \cos(a_n x) dx, \quad J_{2,n} = \int_{x_0-a}^{x_0+a} e^{-\frac{s_1}{2}x} \cdot \sin(a_n x) dx. \end{aligned} \quad (87)$$

Прогнозирование устойчивости откосов является необходимым элементом изучения оползнево-обвальной лавины, ибо при высокой степени устойчивости откосов необходимость расчетов по определению последствий явлений оползне-обвальной природы отпадает. Кроме того, оценка статистической устойчивости является необходимым условием последующего динамического расчета возможного ЛОП, ибо им определяется масса обвального тела.

Известно, что материал оползневых склонов представляет слабо связанную горную породу, имеющую следующие физико-технические характеристики: угол внутреннего трения  $\varphi$ , коэффициент сцепления  $c$ , коэффициент эффективной вязкости  $\eta$ , порог ползучести  $\tau_0$ , плотность  $p$ , и модули упругости  $E$  и  $G$ . Эти характеристики определяются лабораторно-полевыми исследованиями. Некоторые из них представлены в виде графиков в зависимости от влажности грунта [6, 7].

Очевидно, что в допредельном состоянии склон может находиться в чисто упругом деформированном состоянии. Дифференциальные уравнения равновесия в напряжениях имеют следующий вид [6, 7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = & \rho g \sin \alpha + k_s \rho g \cos(\gamma + \alpha), \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = & \rho g \cos \alpha - k_s \rho g \sin(\alpha + \gamma), \end{aligned} \quad (88)$$

где приняты следующие обозначения:  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  — нормальные напряжения относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно,  $\tau_{xy}$  — касательное напряжение,  $\alpha$  — угол наклона оползневого склона к горизонту,  $k_s$  — «сейсмический коэффициент» (коэффициент сотрясения)

$$k_s = \frac{\alpha_s}{g} \quad (\alpha_s \text{ — сейсмическое ускорение}),$$

$\alpha$  — угол наклона оползневого склона к горизонту,  $\gamma$  — угол атаки сейсмической инерционной силы.

Пренебрегая влиянием концевых эффектов на напряженное состояние массива, можно считать, что напряжения не зависят от координаты  $x$ , и тогда выражения (88) преобразуются к виду

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = \rho g \sin \alpha + k_s \rho g \cos(\alpha + \gamma), \quad (89)$$

$$\frac{d\sigma_y}{dy} = \rho g \cos \alpha - k_s \rho g \sin(\alpha + \gamma). \quad (90)$$

Граничные условия для напряжения будут иметь следующий вид:

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (91)$$

$$\sigma_y = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (92)$$

Интегрируя уравнения (89) и (90) с учетом граничных условий (91) и (92) получим:

$$\tau_{xy} = (\rho g \sin \alpha + k_s \rho g \cos(\alpha + \gamma))y, \quad (93)$$

$$\sigma_y = (\rho g \cos \alpha - k_s \rho g \sin(\alpha + \gamma))y, \quad (94)$$

$$\tau_{xy} \leq \operatorname{tg} \varphi \sigma_y + c. \quad (95)$$

Подставим выражения (93) и (94) в (95) получим:

$$[\rho g \sin \alpha + k_s \rho g \cos(\alpha + \gamma)]y \leq \operatorname{tg} \varphi [\rho g \cos \alpha - k_s \rho g \sin(\alpha + \gamma)]y + c.$$

Отсюда получается

$$\rho g [\sin \alpha + k_s \cos(\alpha + \gamma)]y - \operatorname{tg} \varphi [\rho g \cos \alpha - k_s \rho g \sin(\alpha + \gamma)]y \leq c.$$

Мощность критического предельного состояния оползневого склона определяется по следующей зависимости

$$H_{kp} = \frac{c}{\rho g [\cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi) + k_s \cos(\alpha + \gamma) (1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \gamma))]}.$$

Если критическая мощность больше мощности оползневой толщины склона (расстояние от свободной поверхности склона до коренных пород), то склон будет находиться в допредельном состоянии.

При выполнении условия  $H_{kp} \leq H_0$  оползневой склон может перейти за предельное состояние, т. е.

$$\tau_{xy} \geq \operatorname{tg} \varphi \sigma_y + c.$$

Динамические расчеты оползней-обвалов иногда осуществляются, исходя из упрощенных уравнений гидродинамики для сильно вязких жидкостей, обладающих пороговым напряжением сдвига, а в некоторых моделях учитывается еще и кулоновское трение.

В большинстве случаев такие подходы сугубо приближенные, так как в представлениях их физико-механической структуры кроются непреодолимые противоречия. Тем не менее, даже такие подходы имеют право на существование в качестве грубых аналогов для совершенствования модели и в качестве полезных наводящих положений при построении решений, которые обычно трудны, ибо в таких моделях учитывается и нестационарность, и пространственная двухмерность. В работе рассмотрены две такие тестовые модели, описываемые уравнениями в частных производных, в условиях действия периодической сейсмической силы и зависимости коэффициента вязкости от высоты, причем построены и аналитические, и численные решения. Однако, в качестве основного оперативного средства анализа используется система уравнений для композиционных сред,

данная в монографии [10], которая для твердой грунтовой компоненты получена на основании системы уравнений Коши для сплошной среды в напряжениях (в переменных Эйлера), уравнения неразрывности в форме Эйлера, уравнения предельного состояния для сыпучей среды с углом внутреннего трения и коэффициентом сцепления, отвечающего условиям Кулона — Треска — Сен-Венана и уравнения Ишлинского — Гениева, выражающего совпадение направления наибольшей скорости деформации сдвига с одним из направлений семейства линий скольжения.

Для жидкой компоненты, которой заполнены поры грунта, содержащей еще мелкодисперсную глинистую примесь, используется известная система двухмерных уравнений Генки — Илюшина.

Путем суммирования этих систем исключаются компоненты силового взаимодействия между твердой и жидкой составляющими, и путем введения понятия плотности дисперсоида композиционной среды  $\rho$ , ее скорости  $\nu$ , как для смеси по А. Н. Колмогорову, и давления для смеси, по Н. А. Слезкину, система приводится к гидродинамической форме для двухмерного движения (Т. Г. Войнич-Сяноженцкий, 1970) [8]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho W_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho W_x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W_x \cdot W_z) = \rho F_x - \frac{\partial P}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2 \left[ \mu(1-s) + \frac{\tau_0}{H^*} \right] \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{s \sin \varphi (K \operatorname{ctg} \varphi + P_s) X}{\sqrt{1+N^2}} \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[ \mu(1-s) + \frac{\tau_0}{H^*} \right] \left( \frac{\partial W_x}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial x} \right) + \frac{s N \sin \varphi (K \operatorname{ctg} \varphi + P_s) X}{\sqrt{1+N^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho W_z) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho W_x W_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W_z^2) = \rho F_z - \frac{\partial P}{\partial z} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ \mu(1-s) + \frac{\tau_0}{H^*} \right] \left( \frac{\partial W_x}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial x} \right) + \frac{s N \sin \varphi (K \operatorname{ctg} \varphi + P_s) X}{\sqrt{1+N^2}} \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[ 2\mu(1-s) + \frac{\tau_0}{H^*} \right] \frac{\partial W_z}{\partial z} + \frac{s \sin \varphi (K \operatorname{ctg} \varphi + P_s) X}{\sqrt{1+N^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (97)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho W_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W_z) = 0, \quad (98)$$

где  $H^*$  — параметр Генки,  $N$  — параметрическое выражение условия Ишлинского — Гениева, которое для движений без внутренних разрывов при соблюдении условий  $\frac{\partial U_x}{\partial y} \gg \frac{\partial U_x}{\partial x} \sim \frac{\partial U_y}{\partial x}$  равно  $N = \operatorname{ctg} \varphi$ , и это упрощающее представление принимается ниже как для оползне-обвальных, так и снежных или селевых лавин.

Система (96)–(98) используется как базисная для получения одномерных уравнений посредством классической процедуры Буссинеска для однокомпонентных водных потоков. При такой редукции получается следующая система в приближении Сен-Венана

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_\rho \rho W^2 h) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_0 \rho W^2 h) + \left[ \gamma - \frac{2\bar{s} \cdot \sin^2 \varphi (\gamma_s - \gamma)}{1 + \sin^2 \varphi} \right] \cos \psi h \frac{\partial h}{\partial x} \\ & - \gamma h \left[ i - \frac{s f \cos \varphi}{1 + 2f^2} \cdot \frac{\gamma_s - \gamma_w}{\gamma} \right] + \tau_0 + K\bar{s} \left[ \cos^2 \varphi - \frac{\sin^2 2\varphi}{4(1 + \sin^2 \varphi)} \right] + \frac{(1-s)\gamma W^2}{C_{sh}^2} = 0, \end{aligned} \quad (99)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W h)}{\partial x} = \rho_i q_i, \quad (100)$$

в которой  $f = \operatorname{tg} \varphi$  — коэффициент кулоновского трения,  $h$  — толщина тела оползня-обвала,  $W$  — средняя по  $h$  скорость оползневой лавины;  $\gamma_s, \gamma_w, \gamma$  — объемные веса грунта, воды и композиционной среды,  $\psi$  — угол наклона поверхности скольжения к горизонту,  $i = \sin \psi$ ;  $s$  — средняя по  $h$  концентрация грунта в теле оползня,  $\alpha_\rho$  и  $\alpha_0$  — коррективы Буссинеска;  $\rho_i q_i$  — интенсивность путевого захвата (расхода) грунта оползнем-обвалом.

Система (99)–(100) редуцируется в интегральную форму путем интегрирования по продольной координате, что с учетом нулевой толщины у переднего и заднего фронтов лавины и аппроксимации вогнутой поверхности скольжения экспоненциальной зависимостью позволяет свести систему (99)–(100) к одному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{U}{g} \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial t^2} = 2 \frac{U i_H}{\bar{l} p} e^{-p \tilde{x}} \operatorname{sh} \left( \frac{p \bar{l}}{2} \right) - \frac{D_1 U}{\bar{l}} \left( \tilde{x} + \frac{i_H^2 \cdot e^{-p \tilde{x}}}{4p} \right) - D_2 \bar{l}, \quad (101)$$

в котором  $\tilde{x}$  — продольная координата центра массы тела обвала объемом  $U$  и продольной протяженностью  $\bar{l}$ ;  $i_H$  — начальное значение уклона поверхности скольжения,  $D_1$  и  $D_2$  — постоянные, учитывающие физико-механические характеристики композиционной среды:

$$D_1 = \frac{s f}{1 + 2 f^2} \cdot \frac{\gamma_s - \gamma_w}{\gamma} = \operatorname{const}, \quad (102)$$

$$D_2 = \frac{\tau_0}{\gamma} + \frac{K \bar{s}}{\gamma} \left[ \cos^2 \varphi - \frac{\sin^2 \varphi}{4(1 + \sin^2 \varphi)} \right] = \operatorname{const}. \quad (103)$$

Здесь объемная концентрация грунта может приниматься в зависимости от конкретных условий равной:  $s = 0.6 - 0.75$ ,  $\tau_0$  — пороговое напряжение сдвига, обусловленное наличием мелкодисперсных глинистых фракций в порах грунта, заполненных водой.

Решая уравнения (101) для величины скорости движения  $W = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}$ , получим выражение

$$\begin{aligned} \frac{U}{2g} W^2 &= \frac{2U i_H}{p^2 \bar{l}} \operatorname{sh} \left( \frac{p^2 \bar{l}}{2} \right) (1 - e^{-p^2 \tilde{x}}) \\ &- \frac{D_1 U}{8 \bar{l}} \cdot \frac{i_H^2}{p^2} (1 - e^{-2p^2 \tilde{x}}) - D_1 \frac{U}{2 \bar{l}} x^2 - D_2 \bar{l} \tilde{x}. \end{aligned} \quad (104)$$

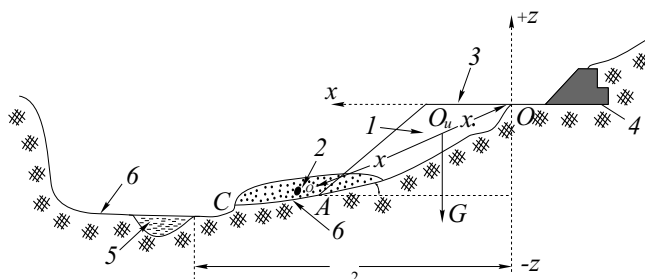
В (104)  $W = 0$  не только при  $\tilde{x} = 0$  (начальное условие), но и при некотором  $\tilde{x} = \tilde{x}_m$ , определяемом по (104), при принятии в нем  $W = 0$ , которое соответствует дальности выноса и остановки оползня-обвала на уполаживающемся склоне.

Наряду с некоторыми другими случаями наиболее опасным проявлением ЛОП оползне-обвального происхождения в горных условиях представляется ситуация, когда срыв неустойчивого откоса с высокой береговой террасы придает такую кинетичность ЛОП, что последний в состоянии перекрыть небольшую горную реку вместе с поймой, создав на ней завальную плотину значительного объема и высоты (рис. 1).

При снеготаянии такая завальная плотина образует водохранилище, которое при прорыве создает непредвиденную волну прорыва, угрожающую всем ниже расположенным объектам. Возможны разрушительные последствия для береговых коммуникаций, зданий, ЛЭП, водозаборных сооружений и т. д. полученные на основании развитой теории соотношения позволяют определить силовое воздействие ЛОП на защитные сооружения.

Начально-краевая задача (1)–(6) в нелинейной постановке решена конечно-разностным методом. В этом случае уравнение (1) начальные условия (2) и граничные

условия (3) и (4) остаются в силе. Остается в силе и граничное условие на дне схематизированного водоема.



**Рис. 1:** 1 — оползневой откос; 2 — конфигурация оползня-обвала, образованного потерей устойчивости откоса полотна автодороги; 3 — первоначальная конфигурация откоса с полотном автодороги с подпорной стенкой 4, 5 — русло реки; 6 — береговые полосы-полупоймы.

В качестве граничных условий на свободной поверхности воды принимаются следующие выражения [9]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - g\eta(x, y, t) = 0 \quad (105)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{при } z = \eta(x, y, t). \quad (106)$$

В результате применения замены переменной [11]

$$z = \frac{z + H}{H + \eta(x, y, t)}, \quad (107)$$

подвижная граница  $z = \eta(x, y, t)$  закрепляется, при  $-H \leq z \leq \eta(x, y, t)$ ,  $0 \leq z' \leq 1$ .

С целью упрощения алгоритма решения задачи и программы расчета на ЭВМ выражения (106) заменяется на следующее

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \int_0^{H+\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz + \int_0^{H+\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz. \quad (108)$$

Сравнение численных результатов, полученных представленными выше двумя методами, в широком диапазоне изменения динамических характеристик обвально-оползневой массы и геометрических размеров водохранилища, нелинейные слагаемые весьма незначительно корректируют амплитуду образованной волны в сторону увеличения.

В связи с этим можно заключить, что линейная теория достаточно точно для практических расчетов описывает волновое движение воды в водохранилище, вызванное обвально-оползневыми явлениями либо лавинообразными потоками.

## Литература

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1.—М.: Физматгиз, 1963.— 727 с.

2. Ламб Г. Гидродинамика.—М.: Гостехизат, 1947.—928 с.
3. Стокер Дж. Дж. Волны на воде.—М.: ИЛ, 1959.—617 с.
4. Мамрадзе Г. П., Музаев И. Д. Определение колебаний воды в водохранилище вследствие оползневых явлений // Сообщения ГрузАН.—1971.—Т. 64, № 2.—С. 115–120.
5. Музаев И. Д., Созанов В. Г. К теории поверхностных гравитационных волн Коши — Гуссона в узких непризматических водоемах // Известия ВУЗов Северо-Кавказского региона. Естественные науки.—1995.—№ 3.—С. 40–47.
6. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды.—М.: Физматгиз, 1954.—315 с.
7. Маслов Н. Н. Механика грунтов в практике строительства (оползни и борьба с ними).—М.: Стройиздат, 1977.—318 с.
8. Войнич-Сяноженцкий Т. Г., Созанов В. Г. Лавинообразные потоки. Возникновение, динамика и воздействие на окружающую среду.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 1997.— 221 с.
9. Шокин Ю. И., Хакимзянов Г. С. Конечно-разностный метод расчета вихревых и потенциальных течений жидкости со свободной поверхностью // Сборник научных трудов «Вычислительные технологии».—Новосибирск, 1994.—Т. 3, № 8.—С. 133–143.

*Статья поступила 10 января 2002 г.*

СОЗАНОВ Валерий Гаврилович, д. т. н.  
г. Владикавказ, Северо-Осетинский госуниверситет

МУЗАЕВ Илларион Давидович, д. т. н.  
г. Владикавказ, Институт прикладной математики  
и информатики ВЦ РАН

МАКАРОВ Сергей Александрович  
г. Владикавказ, Северо-Кавказский государственный  
технологический университет